

Το θεώρημα του Nyquist (Δειγματοληψία σήματος)

Το 1920 εργαζόμενος στα εργαστήρια bell ο Harold Nyquist διατύπωσε ένα θεώρημα σχετικά με την ψηφιακή μορφή των ηλεκτρικών σημάτων.

Το θεώρημα μας λέει απλά ότι για να αναπαράγουμε με ακρίβεια ένα αναλογικό σήμα σε ψηφιακή μορφή η τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας πρέπει να είναι η διπλάσια της συχνότητας του αναλογικού σήματος. Με απλά λόγια εάν έχουμε ένα ηχητικό αναλογικό σήμα το οποίο επαναλαμβάνεται (έχει συχνότητα) 10.000 φορές το δευτερόλεπτο μπορείς να το αναπαράγεις με ακρίβεια σε ψηφιακή μορφή αν το αναπροσαρμόσεις σε μια συχνότητα δειγματοληψίας 20.000 φορές το δευτερόλεπτο. Αντίστοιχα σε μια camera ccd αν θέλουμε να αναπαράγουμε πιστά και με ακρίβεια το αναλογικό σήμα (την εικόνα από το τηλεσκόπιο) πρέπει να το αναπαραστήσουμε ψηφιακά (μέσω της ccd camera) στο διπλάσιο της συχνότητας του αναλογικού σήματος. Με άλλα λόγια η ανάλυση της camera πρέπει να είναι διπλάσια από αυτή του τηλεσκοπίου.

Ο παρακάτω τύπος μπορεί να καθορίσει την ωφέλιμη ανάλυση μιας κάμερας ανάλογα με το τηλεσκόπιο που έχουμε.

Resolution=(ccd pixel size/telescope focal length)x206

Εάν το μέγεθος των πίξελ είναι σε microns(εκατοστά του χιλιοστού) και η εστιακή απόσταση σε mm τότε η ανάλυση θα είναι σε δευτερόλεπτα της μοίρας/ pixel (arcsecond/pixel) όπου αυτή είναι και η διεθνής μονάδα μέτρησης.

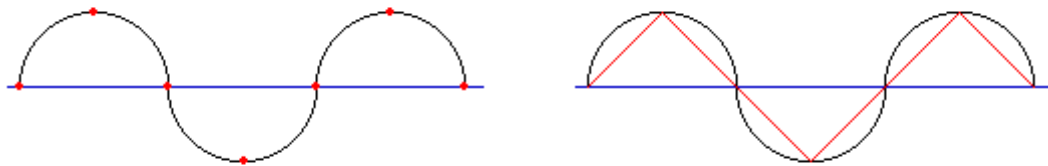
Εάν τώρα έχουμε μια κάμερα ccd με μέγεθος pixel 9 microns και ένα τηλεσκόπιο με εστιακή 1000 mm η ανάλυση θα είναι $(9/1000) \times 206 = 0.009 \times 206 = 1,8''/\text{pixel}$. Αυτή είναι η θεωρητική ανάλυση όμως και όχι η πραγματική, γιατί? Πάρτε ένα ακραίο σχετικά παράδειγμα μιας κάμερας με μικροσκοπικά πίξελ και ενός τηλεσκοπίου με μεγάλη εστιακή. Δοκιμάστε με την SBIG ST-10 επάνω σε ένα celestron 14" f11. Η ανάλυση αυτού του συστήματος είναι $0.36''/\text{pixel}$. Σε ένα τυπικό ουρανό οι συνθήκες παρατήρησης δεν μπορούν να είναι ποτέ καλύτερες από 1-2" και μετά από μια μακρά σχετικά έκθεση το νούμερο αυτό τείνει να γίνει 4". Υπάρχει εδώ κάποιο πλεονέκτημα του να έχουμε μια ανάλυση της παραπάνω τάξης των $0.36''/\text{pixel}$?.....Η απάντηση είναι κατηγορηματικά όχι!

Συχνά ακούμε ότι μια ανάλυση $2''/\text{pixel}$ είναι η ιδανική ανάλυση για μια ccd camera.Θα δούμε τώρα ότι ίσως αυτό να μην είναι απόλυτα ακριβές και ακόμα ότι ίσως να μην παίζει και καθόλου ρόλο.

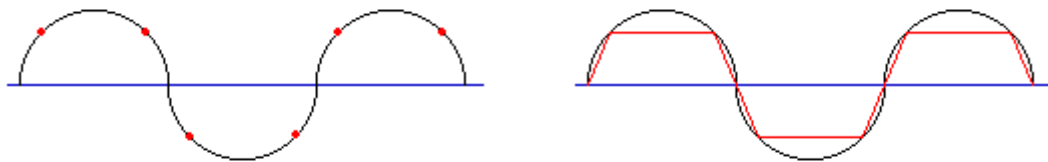
Το παραπάνω θεώρημα λοιπόν μας είπε ότι για την μετατροπή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακό η αναπροσαρμογή του τελευταίου πρέπει να είναι στο 2πλάσιο της συχνότητας του πρώτου. Στην περίπτωση όμως ενός τηλεσκοπίου τη ακριβώς είναι η συχνότητα? Είναι η ανάλυση του συστήματος τηλεσκόπιο – κάμερα όπως την περιγράψαμε πιο πάνω, και περιορίζεται σχεδόν πάντα από τις συνθήκες παρατήρησης του ουρανού, το γνωστό seeing. Αν πάρουμε σαν κανόνα τον μέσο όρο του seeing που είναι 4" μετά από μια σχετικά μακριά έκθεση χρειαζόμαστε μια

τιμή για το ανακατασκευασμένο ψηφιακό μας σήμα της τάξης των 2"/pixel ώστε να ικανοποιείται το θεώρημα του Nyquist.

Γιατί είπαμε όμως παραπάνω ότι αυτό ίσως να μην είναι και απόλυτα αληθές? Στην πραγματικότητα ο Nyquist όταν διατύπωνε το θεώρημα του δεν είχε στο μυαλό του τις ccd cameras, γι αυτό και η ιδέα του αφορά τα 2 διαστάσεων σήματα όπως είναι τα ηλεκτρικά και τα ηχητικά. Το γράφημα ενός ηχητικού σήματος έχει 2 άξονες αυτόν της έντασης και αυτόν του χρόνου και μοιάζει με ένα ημιτονοειδές κύμα, ακόμα και εκεί όμως φαίνονται κάποια μειονεκτήματα όπως φαίνεται στην εικόνα παρακάτω.



Ένα κύμα διαχωρίζεται σε διακριτά σημεία ή δείγματα (samples) τα οποία διαχωρίζονται μεταξύ τους από απόσταση ίση με το μισό του της συχνότητας του κύματος. Η κόκκινη γραμμή στα δεξιά δείχνει πως θα μπορούσε να ανακατασκευαστεί αυτό το σήμα.

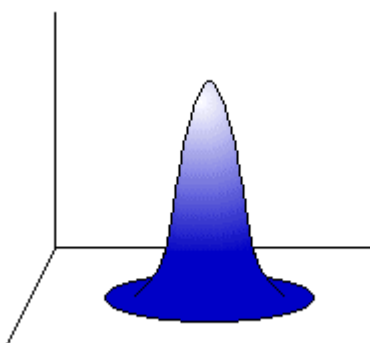


Το πρόβλημα γίνεται εντονότερο όταν τα σημεία δεν ταιριάζουν πλέον με τα σημεία του κύματος.

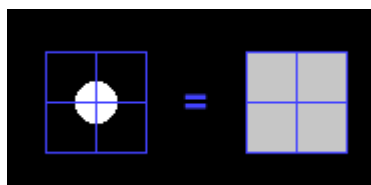
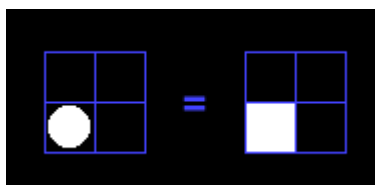
Στην περίπτωση του διαγράμματος από πάνω μας το σήμα έχει κλιπαριστεί που σημαίνει ότι το εύρος της κυματομορφής έχει κοντύνει ή ποιο απλά οι κορυφές και οι κοιλιές του είναι ποιο χαμηλές. Πάρτε για παράδειγμα την ψηφιακή μουσική ενός ήχου MP3. Αντιγράφοντας ένα cd σε ένα ψηφιακό αρχείο έχετε συχνά την επιλογή να επιλέξετε την τιμή της δειγματοληψίας (resample) η οποία για τα mp3 είναι 32,000, 44,100 ή 48,000 φορές το δευτερόλεπτο. Αν έχετε ακούσει ποτέ ένα ήχο από πολύ συμπιεσμένο αρχείο θα προσέξατε ότι ακούγεται πνιγμένος. Αυξάνοντας τα σημεία δειγματοληψίας στο κύμα, βελτιώνεται και η ποιότητα του ήχου ιδιαίτερα οι υψηλές και χαμηλές συχνότητες αλλά με αυτό τον τρόπο αυξάνεται και το μέγεθος του αρχείου. Η ποιότητα του ήχου ενός cd είναι 44.1 KHz άρα στα 32 KHz θα έχουμε ένα ποιο μικρό αρχείο αλλά χειρότερης ποιότητας από αυτό ενός cd.

Τα ίδια πράγματα που περιγράψαμε παραπάνω ισχύουν και για την μετατροπή ενός αναλογικού σήματος τηλεσκοπίου σε ψηφιακό.

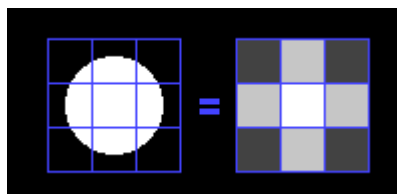
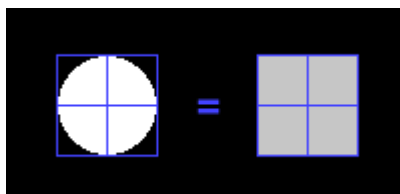
Αλλά μια εικόνα τηλεσκοπίου προσθέτει μια ακόμα πολυπλοκότητα: είναι τρισδιάστατη. Η γραφική απεικόνιση ενός άστρου έχει τρεις άξονες, τον άξονα x (ο οποίος μπορεί να είναι ο Ra , αν θέλετε), τον άξονα y (DEC) και την ένταση. Τα φωτεινότερα αστέρια έχουν υψηλότερες εντάσεις. Επίσης, μια εικόνα τηλεσκοπίου δεν μοιάζει αρκετά σαν ένα ημιτονοειδές κύμα. Λόγω ορισμένων νόμων της φυσικής, ένα οπτικό σύστημα σχηματίζει μια εικόνα μιας σημιακής πηγής (ένα αστέρι) ως καμπύλη Gauss:



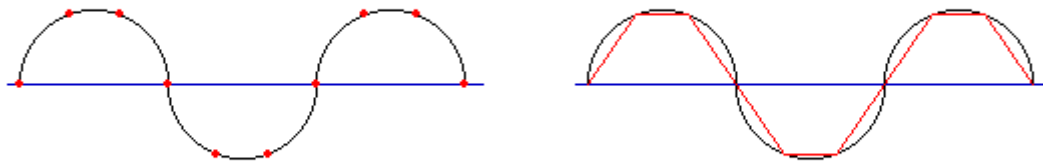
Σημείωση: Ίσως παρατηρήσατε ότι αυτό είναι από μόνο του μια μορφή δειγματοληψίας (sample). Τα οπτικά τηλεσκόπια έχουν πάρει ένα αναλογικό σήμα (το αστέρι) και σχημάτισαν μια κατά προσέγγιση, αλλά όχι ακριβή, αναπαραγωγή του. Τώρα το CCD πρέπει να παράγει ακριβή ψηφιακή αναπαραγωγή της εικόνας του τηλεσκοπίου. Ρίξτε μια ματιά στο διάγραμμα x - y μιας εικόνας αστέρα σε ένα CCD για να δείτε γιατί το θεώρημα του Nyquist μπορεί να μην ισχύει για μια απεικόνιση CCD.



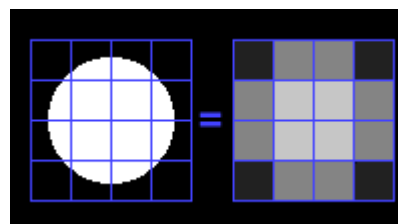
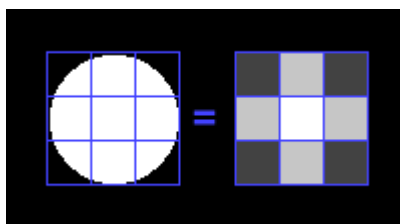
Πάνω: Εάν ένα αστέρι έχει το ίδιο μέγεθος με ένα εικονοστοιχείο (για παράδειγμα, 4" εικονοστοιχείο από μια τυπική τοποθεσία), το αστέρι μπορεί να αναπαραχθεί ως τετράγωνο. Αυτό δεν είναι μια ακριβής ανακατασκευή του αρχικού αναλογικού σήματος. Αν πέφτει στη γωνία μιας ομάδας εικονοστοιχείων, το αστέρι είναι ακόμα τετράγωνο, απλά μεγαλύτερο και πιο σκούρο (καθώς το φως τώρα χωρίζεται σε 4 εικονοστοιχεία).



Πάνω: Στο ρυθμό δειγματοληψίας (sample) Nyquist $1/2$ της ανάλυσης του συστήματος (2" εικονοστοιχείο), το αστέρι εξακολουθεί να είναι ένα τετράγωνο αν πέσει σε μόλις τέσσερα pixels. Αν το αστέρι είναι κεντραρισμένο σε ένα εικονοστοιχείο, αναπαράγεται ως μια (κάπως) στρογγυλή εικόνα. Αυτό είναι μια καλύτερη προσέγγιση στην αρχική εικόνα, αλλά μόνο για εκείνα τα αστέρια που πέφτουν ακριβώς στο σωστό σημείο στο CCD. Επιστρέψτε για λίγο στο ηχητικό μας σήμα. Τι θα συμβεί αν το δειγματοληψούμε συχνότερα, δηλαδή σε τρεις φορές την αρχική συχνότητα; Μπορεί να δημιουργηθεί ακριβέστερη ψηφιακή αναπαραγωγή.



Πάνω: Η δειγματοληψία σε τριπλάσια συχνότητα παράγει καλύτερα αποτελέσματα.
Το ίδιο ισχύει και για το σύστημα CCD / τηλεσκόπιο.



Πάνω: Με την αύξηση της δειγματοληψίας σε 3 φορές την ανάλυση του συστήματος (1,33 "/εικονοστοιχείο), το αστέρι είναι τώρα κυκλικό, σε αμφότερες τις περιπτώσεις όπου η εικόνα του αστεριού είναι κεντραρισμένη σε εικονοστοιχείο (αριστερά) και κεντραρισμένη σε μια διασταύρωση εικονοστοιχείων (δεξιά). Επίσης, τα επιμέρους εικονοστοιχεία μπορούν να πάρουν διάφορες τιμές έντασης για να αναπαράγουν με μεγαλύτερη ακρίβεια την αρχική εικόνα αστεριού. Τα περισσότερα εικονοστοιχεία παρέχουν επίσης στον υπολογιστή περισσότερες πληροφορίες με τις οποίες μπορεί να εργαστεί κατά την επεξεργασία.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να αυξήσετε την ανάλυση. Το πρώτο είναι να χρησιμοποιήσετε ένα τσιπ CCD με μικρότερα εικονοστοιχεία. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι υπάρχει ένας περιορισμός από το ποιες φωτογραφικές μηχανές είναι διαθέσιμες και από το οικονομικό κόστος. Επίσης, για να έχετε ένα ευρύ πεδίο θέασης με μικρά εικονοστοιχεία, χρειάζεστε ένα CCD με μεγάλο αριθμό εικονοστοιχείων. Αυτό σημαίνει περισσότερα χρήματα και περισσότερα δεδομένα για να αντιμετωπίσει ο υπολογιστής, καθιστώντας τον χειρισμό εικόνας περισσότερο απαιτητική. Η άλλη επιλογή για την αύξηση της ανάλυσης είναι η αύξηση του εστιακού μήκους του τηλεσκοπίου. Αυτό σημαίνει ότι το οπτικό πεδίο είναι μικρότερο και, συνήθως, ο εστιακός λόγος είναι πιο αργός, οδηγώντας σε αυξημένους χρόνους έκθεσης. Είναι δυνατό να υπάρξει ένα γρήγορο τηλεσκόπιο με μακρύ εστιακό μήκος, αλλά θα απαιτήσει πολύ μεγάλο άνοιγμα, που σημαίνει μεγαλύτερο μέγεθος, βάρος και κόστος.

Optimal Focal Lengths for Popular Pixel Sizes (3x sampling rate)

Pixel Size	Focal Length (Average Seeing)	Focal Length (Excellent Seeing)
3.5	550mm	1100mm
6.8	1050mm	2100mm
7.4	1150mm	2300mm
9	1400mm	2800mm

Αναλογία σήματος προς θόρυβο

Η ανάλυση επίσης είναι καθοριστικός παράγοντας για τον λόγο σήματος προς θόρυβο. Μικρές λεπτομέρειες (συμπεριλαμβανομένων των αστεριών) έχουν αναλογίες σήματος προς θόρυβο (SNR) οι οποίες είναι συνάρτηση (μεταξύ άλλων παραγόντων) της ανάλυσης του συστήματος απεικόνισης. Οι εικόνες που δεν έχουν

σωστή δειγματοληψία (*sample*). μπορούν να οδηγήσουν σε μείωση του SNR. Για να αποτυπώσετε και τα πιο αχνά αστέρια, η σωστή δειγματοληψία (*sample*) είναι σημαντική. Η υψηλότερη ανάλυση ισοδυναμεί με μεγαλύτερο SNR.

Η λύση?

Ίσως η καλύτερη λύση είναι απλά να ξεχάσουμε το Θεώρημα Nyquist. Θέλετε καλή ανάλυση για τις λεπτομέρειες, αλλά αυτό δεν είναι ο πιο σημαντικός παράγοντας για να έχετε όμορφες εικόνες. Πιθανότατα, χρειάζεστε αρκετό οπτικό πεδίο για να χωρέσετε μεγάλα αντικείμενα στην εικόνα. Επίσης, είναι καλύτερο ένα γρήγορο σύστημα για σχετικά κοντές εκθέσεις. Σαν βασικό κανόνα, μπορούμε να πούμε ότι θέλουμε μικρά εικονοστοιχεία (13 μικρομέτρων ή λιγότερο) για τηλεσκόπια μικρού εστιακού μήκους και μεγαλύτερα εικονοστοιχεία (16 μικρομέτρων και άνω) για τηλεσκόπια με πολύ μεγάλη εστιακή απόσταση. Αλλά για τις όμορφες εικόνες, οι κανόνες μπορούν εύκολα να τεντωθούν. Αν ο στόχος σας είναι να επιτύχετε την καλύτερη δυνατή λύση για την επίτευξη των ελάχιστων δυνατών μεγεθών, η δειγματοληψία (*sample*) είναι πιο κρίσιμη. Από άποψη αισθητικής όμως, δεν έχει τόση σημασία.

Λάβετε υπόψη ότι πολύ λίγες από τις εντυπωσιακές εικόνες σε περιοδικά και στο internet πραγματοποιήθηκαν με ένα σύστημα που παράγει ανάλυση 2 "/ pixel! Μερικές λήφθηκαν σε 4,2" / pixel , ενώ άλλες είναι στο 0,5" / pixel. Κανονικά ο σημαντικότερος παράγοντας είναι το οπτικό πεδίο. Αν απεικονίζετε ένα μεγάλο αντικείμενο χρειάζεστε ένα τηλεσκόπιο μικρού εστιακού μήκους. Για μικρούς στόχους, είναι απαραίτητο ένα μεγάλο εστιακό μήκος. Είναι καλύτερα να χωρέσει σωστά στο πεδίο το αντικείμενο παρά να αναλωθούμε στα arcseconds ανά pixel!