Τρίτη, 16. Ιουλίου 2024

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε όλους τους πραγματικούς αριθμούς α που είναι τέτοιοι, ώστε για κάθε θετικό ακέραιο n, ο ακέραιος

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

είναι πολλαπλάσιος του n. (Με $\lfloor z \rfloor$ συμβολίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του z. Για παράδειγμα, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ και $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a, b), για τα οποία υπάρχουν θετικοί ακέραιοι g και N τέτοιοι, ώστε η ισότητα

$$\text{ΜΚΔ}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

να ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geqslant N$. (Με ΜΚΔ(x, y) συμβολίζουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων x και y.)

Πρόβλημα 3. Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots$ μία άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων και N ένας θετικός ακέραιος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n > N$, ο ακέραιος a_n είναι ίσος με το πλήθος των φορών που εμφανίζεται ο ακέραιος a_{n-1} στη λίστα $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μία από τις ακολουθίες $a_1, a_3, a_5, \ldots$ και $a_2, a_4, a_6, \ldots$ είναι τελικά περιοδική.

(Μια άπειρη ακολουθία $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ονομάζεται *τελικά περιοδική*, αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι p και M τέτοιοι, ώστε $b_{m+p} = b_m$ για κάθε $m \geqslant M$.)

Τετάρτη, 17. Ιουλίου 2024

Πρόβλημα 4. Έστω ABC ένα τρίγωνο με $AB < AC < BC$. Έστω I το έγκεντρο και ω ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC. Έστω X το σημείο στην ευθεία BC, διαφορετικό του C, που είναι τέτοιο, ώστε η ευθεία που περνάει από το X και είναι παράλληλη στην ευθεία AC να είναι εφαπτομένη στον κύκλο ω. Ομοίως, έστω Y το σημείο στην ευθεία BC, διαφορετικό του B, που είναι τέτοιο, ώστε η ευθεία που περνάει από το Y και είναι παράλληλη στην ευθεία AB να είναι εφαπτομένη στον κύκλο ω. Έστω ότι η ευθεία AI τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC ξανά στο σημείο $P \neq A$. Έστω K και L τα μέσα των πλευρών AC και AB, αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\angle KIL + \angle YPX = 180°$.

Πρόβλημα 5. Ο Τούρμπο το σαλιγκάρι παίζει ένα παιγνίδι σε έναν πίνακα με 2024 οριζόντιες γραμμές και 2023 κατακόρυφες στήλες. Υπάρχουν κρυμμένα τέρατα σε 2022 κελιά του πίνακα. Αρχικά, ο Τούρμπο δεν γνωρίζει κανένα από τα κελιά που βρίσκονται τα τέρατα, αλλά γνωρίζει ότι υπάρχει ακριβώς ένα τέρας σε κάθε οριζόντια γραμμή εκτός από την πρώτη γραμμή και την τελευταία γραμμή, και ότι κάθε κατακόρυφη στήλη περιέχει το πολύ ένα τέρας.

Ο Τούρμπο κάνει μία σειρά προσπαθειών για να πάει από την πρώτη γραμμή στη τελευταία γραμμή. Σε κάθε προσπάθεια, επιλέγει να αρχίσει από οποιοδήποτε κελί της πρώτης γραμμής και στη συνέχεια κινείται επανειλημμένα σε ένα γειτονικό κελί που έχει μία κοινή πλευρά με το κελί στο οποίο βρίσκεται. (Επιτρέπεται να επιστρέψει σε ένα κελί που είχε επισκεφθεί νωρίτερα.) Αν φθάσει σε ένα κελί που περιέχει κάποιο τέρας, η προσπάθειά του τελειώνει και μεταφέρεται στην πρώτη γραμμή για να αρχίσει μία καινούρια προσπάθεια. Τα τέρατα δεν μετακινούνται και ο Τούρμπο θυμάται για κάθε κελί που έχει επισκεφθεί αν περιέχει τέρας ή όχι. Αν φθάσει σε οποιοδήποτε κελί της τελευταίας γραμμής, τότε η προσπάθεια του τελειώνει και το παιγνίδι τερματίζεται.

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του n για την οποία ο Τούρμπο έχει μία στρατηγική που του εγγυάται ότι θα φθάσει στην τελευταία γραμμή κατά την $n^{\text{οστή}}$ προσπάθεια ή νωρίτερα, ανεξάρτητα από τις θέσεις που βρίσκονται τα τέρατα.

Πρόβλημα 6. Έστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Μία συνάρτηση $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ λέγεται *υδροθερμική*, αν ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$ ισχύει τουλάχιστον μία από τις ισότητες

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{ή} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος c τέτοιος, ώστε για κάθε υδροθερμική συνάρτηση f να υπάρχουν το πολύ c διαφορετικοί ρητοί αριθμοί που γράφονται στη μορφή $f(r) + f(-r)$ για κάποιο ρητό αριθμό r, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του c.